# سلسلة تمارين الأعداد المركبة الواردة في البكالوريا

## من 2008 إلى 2018 [شعبة علوم تجريبية]

**السنة الدراسية** : 2018/ 2019 جمع و إعداد الأستاذ : بخاخشة خالد

### التمرين الأول [باك 2008] [م1] (4,5ن)

1) حل في مجوعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ ، المعادلة : $Z^2-(1+2i)Z-1+i=0$

نرمز للحلين بـ $Z_1$ و $Z_2$ حيث $|Z_1|<|Z_2|$. بيَن أن $\left(\frac{Z_1}{Z_2}\right)^{2008}$ عدد حقيقي .

2) المستوي المركَب المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $\left(O;\vec{u},\vec{v}\right)$

لتكن $A, B$ و $C$ نقط من المستوي لواحقها على الترتيب : $1$، $Z_1$ ، $Z_2$ . و ليكن $Z$ العدد المركَب حيث : $Z=\frac{Z_2-1}{Z_1-1}$ .

أ- إنطلاقا من التعريف $e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta$ و من الخاصية $e^{i(\theta_1+\theta_2)}=e^{i\theta_1}\times e^{i\theta_2}$ .

برهن أن : $e^{-i\theta}=\frac{1}{e^{i\theta}}$ و أن : $\frac{e^{i\theta_1}}{e^{i\theta_2}}=e^{i(\theta_1-\theta_2)}$ حيث $\theta, \theta_1$ و $\theta_2$ أعداد حقيقية .

ب- أكتب $Z$ على الشكل الأسَي .

جـ- أكتب $Z$ على الشكل المثلثي و استنتج أن $C$ هي صورة $B$ بتشابه مباشر مركزه $A$ ، يطلب تعيين نسبته و زاويته .

### التمرين الثاني [باك 2008] [م2] (5ن)

1) حل في مجوعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ ، المعادلة ذات المجهول $Z$ التالية : $Z^2+iZ-2-6i=0$

2) نعتبر في المستوي المركَب المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $\left(O;\vec{u},\vec{v}\right)$ النقطتين $A$ و $B$ التين لاحقتاهما $Z_A$ و $Z_B$ على الترتيب حيث : $Z_A=2+i$ و $Z_B=-2-i$

عيَن $Z_\omega$ لاحقة النقطة $\omega$ مركز الدائرة $(\Gamma)$ ذات القطر $[AB]$ .

3) لتكن $C$ النقطة ذات الاحقة $Z_C$ حيث : $Z_C=\frac{4-i}{1+i}$ .

أكتب $Z_C$ على الشكل الجبري ثم أثبت أن النقطة $C$ تنتمي إلى الدائرة $(\Gamma)$ .

4) أ- برهن أن عبارة التشابه المباشر الذي مركزه $M_0(Z_0)$ و نسبته $k$ $(k>0)$ و زاويته $\theta$ و الذي يرفق بكل نقطة $M(Z)$ النقطة $M'(Z')$ هي : $Z'-Z_0=ke^{i\theta}(Z-Z_0)$

ب- **تطبيق** : عيَن الطبيعة و العناصر المميزة للتحويل $S$ المعرف بـ : $Z'+\frac{1}{2}i=2e^{i\frac{\pi}{3}}\left(Z+\frac{1}{2}i\right)$ .

### التمرين الثالث [باك 2009] [م1] ( 5ن)

$P(Z)$ كثير حدود حيث : $P(Z)=(Z-1-i)(Z^2-2Z+4)$ و $Z$ عدد مركب .

1) حل في المجموعة $\mathbb{C}$ المعادلة : $P(Z)=0$

2) نضع : $Z_1=1+i$ , $Z_2=1-\sqrt{3}i$

أ- أكتب $Z_1$ و $Z_2$ على الشكل الأسي .

ب- أكتب $\frac{Z_1}{Z_2}$ على الشكل الجبري ثم الشكل الأسي .

جـ- إستنتج القيمة المضبوطة لكل من $\sin\left(\frac{7\pi}{12}\right)$ و $\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right)$ .

3) أ) $n$ عدد طبيعي ، عين قيم $n$ بحيث يكون العدد $\left(\frac{Z_1}{Z_2}\right)^n$ حقيقيا. ب) أحسب قيمة العدد $\left(\frac{Z_1}{Z_2}\right)^{456}$ .

## التمرين الرابع[باك 2009] [م2] (4ن)

المستوي منسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$.

1) حل في المجموعة $\mathbb{C}$ المعادلة : $Z^2-2Z+4=0$

2) نسمي $Z_1$ و $Z_2$ حلي هذه المعادلة.

أ- أكتب العددين $Z_1$ و $Z_2$ على الشكل الأسي .

ب- $A, B$ و $C$ هي النقط من المستوي التي لواحقها على الترتيب : $Z_A=1-\sqrt{3}i$ , $Z_B=1+\sqrt{3}i$ , $Z_C=\frac{1}{2}\left(5+\sqrt{3}i\right)$

أحسب الأطوال $BC$ , $AC$ , $AB$ ، ثم استنتج طبيعة المثلث $ABC$ .

جـ- جد الطويلة و عمدة للعدد المركب $Z$ حيث : $Z=\frac{Z_C-Z_B}{Z_A-Z_B}$

د- أحسب $Z^3$ , $Z^6$ ثم استنتج أن $Z^{3k}$ عدد حقيقي من أجل كل عدد طبيعي $k$ .

## التمرين الخامس[باك 2010] [م2] ( 5ن)

نعتبر في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $\left(O;\vec{u},\vec{v}\right)$ النقطتين $A, B$ اللتين لاحقتيهما على الترتيب : $Z_A=1+i$ , $Z_B=3i$

1) أكتب على الشكل الأسي : $Z_A$ و $Z_B$ .

2) ليكن $S$ التشابه المباشر الذي يرفق بكل نقطة $M$ لاحقتها $Z$ النقطة $M'$ لاحقتها $Z'$ بحيث : $Z'=2iZ+6+3i$

أ- عين العناصر المميزة للتشابه المباشر $S$ .

ب- عين $Z_C$ لاحقة النقطة $C$ صورة النقطة $A$ بالتشابه المباشر $S$ .

جـ- استنتج طبيعة المثلث $ABC$ .

3) لتكن النقطة $D$ مرجح الجملة $\left\{(A;2),(B;-2),(C;2)\right\}$ .

أ- عين $Z_D$ لاحقة النقطة $D$ .

ب- عين مع التبرير طبيعة الرباعي $ABCD$.

4) لتكن $M$ نقطة من المستوي تختلف عن $B$ و عن $D$ لاحقتها $Z$ و لتكن $(\Delta)$ مجموعة النقط $M$ ذات اللاحقة $Z$ التي يكون من أجلها $\frac{Z_B-Z}{Z_D-Z}$ عددا حقيقيا موجبا تماما.

أ- تحقق أن النقطة $E$ ذات اللاحقة $Z_E=6+3i$ تنتمي إلى $(\Delta)$.

ب- أعط تفسيرا هندسيا لعمدة العدد المركب $\frac{Z_B-Z}{Z_D-Z}$ . عين حينئذ المجموعة $(\Delta)$.

## التمرين السادس[باك 2010] [م2] ( 4ن)

1) حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة : $Z^2-6Z+18=0$ ، ثم أكتب الحلين على الشكل الأسي .

2) في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $\left(O;\vec{u},\vec{v}\right)$ ، نعتبر النقط $A, B, C$ و $D$ لواحقها على الترتيب :

$$Z_A=3+3i \quad , \quad Z_B=\overline{Z_A} \quad , \quad Z_C=-Z_A \quad , \quad Z_D=-Z_B$$

أ- بين أن النقط $A, B, C$ و $D$ تنتمي إلى نفس الدائرة ذات المركز O .

ب- عين زاوية للدوران $R$ الذي مركزه O و يحول النقطة $A$ إلى $B$ .

جـ- بين أن النقط $A, O$ و $C$ في استقامية و كذلك النقط $B, O, D$ .

د- إستنتج طبيعة الرباعي $ABCD$.

## التمرين السابع [باك 2011] [م1] ( 5ن)

نعتبر في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$ ، النقط $C,B,A$ لواحقها على الترتيب :

$$Z_A=-i \quad ; \quad Z_B=2+3i \quad ; \quad Z_C=-4+i$$

1) أ- أكتب على الشكل الجبري العدد المركب $\dfrac{Z_C-Z_A}{Z_B-Z_A}$ .

ب- عيّن طويلة العدد المركب $\dfrac{Z_C-Z_A}{Z_B-Z_A}$ و عمدة له ، ثم استنتج طبيعة المثلث $ABC$.

2) نعتبر التحويل النقطي T في المستوي الذي يرفق بكل نقطة $M$ لاحقتها Z ، النقطة $M'$ ذات الاحقة $Z'$ بحيث : $Z'=iZ-1-i$

أ- عيّن طبيعة التحويل T محددا عناصره المميزة.

ب- ما هي صورة النقطة $B$ بالتحويل T .

3) لتكن $D$ ذات اللاحقة $Z_D=-6+2i$

أ- بيّن أن النقط $D,C,A$ في استقامية.

ب- عيّن نسبة التحاكي $h$ الذي مركزه $A$ و يحول النقطة $C$ إلى $D$ .

جـ- عيّن العناصر المميزة للتشابه المباشر $S$ الذي مركزه $A$ و يحول $B$ إلى $D$ .

## التمرين الثامن [باك 2011] [م2] ( 4ن)

نعتبر في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$ النقط $C,B,A$ لواحقها على الترتيب :

$$Z_A=3-2i \quad , \quad Z_B=3+2i \quad , \quad Z_C=4i$$

1) أ- علم النقط $C,B,A$.

ب- ما هي طبيعة الرباعي $OABC$ ؟ علل إجابتك .

جـ- عيّن لاحقة النقطة $\Omega$ مركز الرباعي $OABC$.

2) عيّن ثم أنشئ $(E)$ مجموعة النقط $M$ من المستوي التي تحقق : $\left\|\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right\|=12$

3) أ- حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة : $Z^2-6Z+13=0$

نسمي $Z_1,Z_0$ حلي هذه المعادلة

ب- لتكن $M$ نقطة من المستوي لاحقتها العدد المركب Z .

- عيّن مجموعة النقطة $M$ من المستوي التي تحقق : $|Z-Z_0|=|Z-Z_1|$.

## التمرين التاسع [باك 2012] [م1] ( 4ن)

1) نعتبر في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول Z التالية : $Z=\dfrac{3i(Z+2i)}{Z-2+3i}$ (حيث $Z\neq 2-3i$ )

- حل في $\mathbb{C}$ هذه المعادلة.

2) ينسب المستوي المركب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$ . $B,A$ نقطتان لاحقتاهما على الترتيب : $Z_A$ و $Z_B$ حيث :

$$Z_B=1-i\sqrt{5} \quad \text{و} \quad Z_A=1+i\sqrt{5}$$

- تحقق أن $A$ و $B$ تنتميان إلى دائرة مركزها $O$ يطلب تعيين نصف قطرها.

3) نرفق بكل نقطة $M$ من المستوي لاحقتها Z ، ( $Z\neq 2-3i$ ) النقطة $M'$ لاحقتها $Z'$ حيث : $Z'=\dfrac{3i(Z+2i)}{Z-2+3i}$

النقط $C$ ، $D$ ، $E$ لواحقها على الترتيب: $Z_C=-2i$ ، $Z_D=2-3i$ و $Z_E=3i$ و $(\Delta)$ محور القطعة $[CD]$ .

أ- عبّر عن المسافة $OM'$ بدلالة المسافتين $CM$ و $DM$ .

ب- إستنتج أنه من أجل كل نقطة $M$ من $(\Delta)$ فإن النقطة $M'$ تنتمي إلى دائرة $(\gamma)$ يطلب تعيين مركزها و نصف قطرها .

تحقق أن $E$ تنتمي إلى $(\gamma)$ .

## التمرين العاشر [باك 2012] [م2] (4,5ن)

1) $P(Z)$ كثير حدود للمتغيّر المركب Z حيث: $P(Z)=Z^3-12Z^2+48Z-72$

أ- تحقق أن 6 هو جذر لكثير الحدود $P(Z)$ .

بـ- حدد العددين الحقيقيين $\alpha$ و $\beta$ بحيث من أجل كل عدد مركب Z : $P(Z)=(Z-6)\left(Z^2+\alpha Z+\beta\right)$ .

جـ- حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ ، المعادلة $P(Z)=0$

2) المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $\left(O;\vec{u},\vec{v}\right)$ . $A$ ، $B$ ، $C$ نقط من المستوي المركب لواحقها على الترتيب :

$Z_A=6$ ، $Z_B=3+i\sqrt{3}$ و $Z_C=3-i\sqrt{3}$

أ- أكتب كلا من $Z_A$ ، $Z_B$ و $Z_C$ على الشكل الأسّي.

بـ- أكتب العدد المركب $\dfrac{Z_A-Z_B}{Z_A-Z_C}$ على الشكل الجبري ، ثم على الشكل الأسي.

جـ- إستنتج طبيعة المثلث $ABC$ .

3) ليكن $S$ التشابه المباشر الذي مركزه $C$ ، نسبته $\sqrt{3}$ و زاويته $\dfrac{\pi}{2}$

أ- جد الكتابة المركبة للتشابه $S$ .

بـ- عيّن $Z_{A'}$ لاحقة النقطة $A'$ صورة النقطة $A$ بالتشابه $S$ .

جـ- بيّن أن النقط $A$ ، $B$ ، $A'$ في إستقامية.

## التمرين الحادي عشر [باك 2013] [م1] (5ن)

1) حل في مجوعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ ، المعادلة $(I)$ ذات المجهول Z التالية :

$(I)$ .......... $Z^2-(4\cos\alpha)Z+4=0$ حيث $\alpha$ وسيط حقيقي.

2) من أجل $\alpha=\dfrac{\pi}{3}$ ، نرمز إلى حلي المعادلة $(I)$ بـ $Z_1$ و $Z_2$ . بيّن أن $\left(\dfrac{Z_1}{Z_2}\right)^{2013}=1$ .

3) نعتبر في المستوي المركّب المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $\left(O;\vec{u},\vec{v}\right)$ النقط $A,B$ و $C$ التي لواحقها على الترتيب :

$Z_A=1+i\sqrt{3}$ ، $Z_B=1-i\sqrt{3}$ و $Z_C=4+i\sqrt{3}$ .

أ- أنشئ النقط $A,B$ و $C$ .

بـ- أكتب على الشكل الجبري العدد المركّب $\dfrac{Z_C-Z_A}{Z_B-Z_A}$ ، ثم استنتج أن $C$هي صورة $B$ بالتشابه المباشر $S$ الذي مركزه $A$ و يطلب تعيين نسبته و زاويته.

جـ- عين لاحقة النقطة $G$مرجح الجملة $\left\{(A;1),(B;-1),(C;2)\right\}$ ، ثم أنشئ $G$.

د - أحسب $Z_D$ لاحقة النقطة $D$ بحيث يكون الرباعي $ABDG$ متوازي أضلاع .

## التمرين الثاني عشر [باك 2013] [م2] (4,5ن)

نعتبر في مجوعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة $(E)$ ذات المجهول Z الآتية : $(E)$ .......... $Z^2+4Z+13=0$

1) تحقق أن العدد المركّب $-2-3i$ حل للمعادلة $(E)$ ، ثم جد الحل الآخر .

2) $A$ و $B$ نقطتان من المستوي المركّب لاحقتاهما $Z_A=-2-3i$ و $Z_B=i$ على الترتيب. $S$ التشابه المباشر الذي مركزه $A$ ، نسبته $\dfrac{1}{2}$ و زاويته $\dfrac{\pi}{2}$ و الذي يحول كل نقطة $M(Z)$ من المستوي إلى النقطة $M'(Z')$ .

أ- بيّن أن : $Z'=\dfrac{1}{2}iZ-\dfrac{7}{2}-2i$ .

بـ- أحسب $Z_C$ لاحقة النقطة $C$ ، علما أن $C$هي صورة $B$ بالتشابه $S$ .

3) لتكن النقطة $D$ حيث : $2\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{O}$ .

أ- بيَن أن $D$ مرجح النقطتين $A$ و $B$ المرفقتين بمعاملين حقيقين يطلب تعيينهما .

بـ- أحسب $Z_D$ لاحقة النقطة $D$ .

جـ- بيَن أن $\frac{Z_D-Z_A}{Z_C-Z_A}=i$ ، ثم استنتج طبيعة المثلث $ACD$ .

## التمرين الثالث عشر [باك 2014] [م1] ( 5ن)

1) حل في مجوعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول $Z$ التالية : $Z^2-6\sqrt{2}Z+36=0$

2) المستوي المركَب منسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $\left(O;\vec{u},\vec{v}\right)$

لتكن النقط $A,B,C$ و $D$ التي لواحقها على الترتيب :

$Z_A=3\sqrt{2}\left(1+i\right)$ ، $Z_B=\overline{Z}_A$ ، $Z_C=6\sqrt{2}$ ، $Z_D=\frac{Z_C}{2}$

أ- أكتب $Z_A,Z_B$ و $Z_A\left(1+i\right)$ على الشكل الأسَي.

بـ- أحسب $\left(\frac{\left(1+i\right)Z_A}{6\sqrt{2}}\right)^{2014}$ .

جـ- بيَن أن النقط $O,A,B$ و $C$ تنتمي إلى نفس الدائرة التي مركزها $D$ ، يطلب تعيين نصف قطرها .

د- أحسب $\frac{Z_B-Z_C}{Z_A-Z_C}$ ثم جد قيسا للزاوية $\left(\overrightarrow{CA};\overrightarrow{CB}\right)$ . ماهي طبيعة الرباعي $OACB$ ؟

3) ليكن $R$ الدوران الذي مركزه $O$ و زاويته $\frac{\pi}{2}$

أ- أكتب العبارة المركَبة للدوران $R$ .

بـ- عيَن لاحقة النقطة $C'$ صورة $C$ بالدوران $R$ ثم تحقق أن النقط $A,C$ و $C'$ في إستقامية .

جـ- عيَن لاحقة النقطة $A'$ صورة $A$ بالدوران $R$ ثم حدَد صورة الرباعي $OACB$ بالدوران $R$ .

## التمرين الرابع عشر [باك 2014] [م2] ( 4ن)

1) حل في مجوعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول $Z$ التالية : $\left(Z-i\right)\left(Z^2-2Z+5\right)=0$

2) في المستوي المركَب المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $\left(O;\vec{u},\vec{v}\right)$ (وحدة الطول $1cm$ )

تعطى النقط $A,B$ و $C$ لواحقها على الترتيب : $Z_A=i$ ، $Z_B=1+2i$ ، $Z_C=1-2i$ .

أ- أنشئ النقط $A,B$ و $C$ .

بـ- جد $Z_H$ لاحقة النقطة $H$ المسقط العمودي للنقطة $A$ على $\left(BC\right)$ .

جـ- أحسب مساحة المثلث $ABC$ .

3) ليكن $S$ التشابه المباشر الذي مركزه $A$ و نسبته $\frac{1}{2}$ و زاويته $\frac{\pi}{2}$

أ- عيَن الكتابة المركَبة للتشابه $S$ .

بـ- بيَن أن مساحة صورة المثلث $ABC$ بالتشابه $S$ تساوي $\frac{1}{2}cm^2$ .

4) $M$ نقطة لاحقتها $Z$ ، عيَن مجموعة النقط $M$ حيث : $\left|Z\right|=\left|iZ+1+2i\right|$ .

## التمرين الخامس عشر [باك 2015] [م1] (4.5ن)

**I)** عيّن العددين المركّبين $\alpha$ و $\beta$ حيث : $\begin{cases} 2\alpha-\beta=-3 \\ 2\overline{\alpha}+\overline{\beta}=-3-2i\sqrt{3} \end{cases}$ مع $\overline{\alpha}$ مرافق $\alpha$ و $\overline{\beta}$ مرافق $\beta$ .

**II)** المستوي منسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $\left(O;\vec{u},\vec{v}\right)$ ، $B,A$ و $C$ النقط التي لواحقها على الترتيب :

$Z_A=-\frac{3}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$ ، $Z_B=\overline{Z}_A$ ، $Z_A=Z_C.e^{i\frac{\pi}{3}}$ .

1) أ- أكتب $Z_A$ و $Z_C$ على الشكل الأسّي ثم عيّن قيم العدد الطبيعي n بحيث يكون $\left(\frac{Z_A}{Z_C}\right)^n$ حقيقيا سالبا .

ب- تحقق أن العدد المركّب $2\left(\frac{Z_A}{\sqrt{3}}\right)^{2015}+\left(\frac{Z_B}{\sqrt{3}}\right)^{1962}-\left(\frac{Z_C}{\sqrt{3}}\right)^{1435}$ حقيقي .

2) $D$ النقطة ذات اللاحقة $Z_D=1+i$

أ- حدد النسبة و زاوية للتشابه $S$ الذي مركزه $O$ و يحوّل $D$ إلى $A$ .

ب- أكتب $\frac{Z_A}{Z_D}$ على الشكل الجبري ثم استنتج القيمة المضبوطة لكل من : $\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right)$ و $\sin\left(\frac{7\pi}{12}\right)$ .

3) عيّن مجموعة النقط M ذات اللاحقة Z التي تحقق : $Z=k(1+i)e^{i\left(\frac{7\pi}{12}\right)}$ حيث k يمسح $\mathbb{R}^+$ .

## التمرين السادس عشر [باك 2015] [م2] (5ن)

في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $\left(O;\vec{u},\vec{v}\right)$ نعتبر النقط $B,A$ و $C$ التي لواحقها على الترتيب : $Z_A,Z_B$ و $Z_C$ حيث

$Z_A=2e^{i\frac{\pi}{6}}$ ، $Z_B=-\overline{Z}_A$ ، $Z_C=-(Z_A+Z_B)$ ، ( $\overline{Z}_A$ مرافق العدد $Z_A$ )

1) أ- أكتب كلا من العددين المركّبين $Z_B$ و $Z_C$ على الشكل الأسّي.

ب- استنتج أن النقط $B,A$ و $C$ تنتمي إلى دائرة $(\gamma)$ يطلب تعيين مركزها و نصف قطرها .

جـ- أنشىء الدائرة $(\gamma)$ و النقط $B,A$ و $C$ .

2) أ- تحقق أن : $\frac{Z_B-Z_C}{Z_B-Z_A}=e^{-i\frac{\pi}{3}}$

ب- استنتج أن المثلث $ABC$ متقايس الأضلاع و أن النقطة $O$ مركز ثقل هذا المثلث .

جـ- عيّن و أنشىء $(E)$ مجموعة النقط M ذات اللاحقة Z حيث : $|Z|=\left|Z-\sqrt{3}-i\right|$

3) أ- عيّن زاوية للدوران $r$ الذي مركزه $O$ ويحوّل $C$ إلى $A$ .

ب- أثبت أن صورة $(E)$ بالدوران $r$ هي محور القطعة $[OB]$ .

## التمرين السابع عشر [باك 2016] [م1] (4ن)

1) نضع من أجل كل عدد مركب Z : $P(Z)=Z^3-24\sqrt{3}$

أ- تحقق أن: $P\left(2\sqrt{3}\right)=0$ .

ب- جد العددين الحقيقيين a و b بحيث من أجل كل عدد مركب Z : $P(Z)=\left(Z-2\sqrt{3}\right)\left(Z^2+aZ+b\right)$ .

جـ- حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ ، المعادلة $P(Z)=0$

2) المستوي منسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $\left(O;\vec{u},\vec{v}\right)$ . $A$ ، $B$ ، $C$ نقط من المستوي لواحقها على الترتيب :

$Z_A=-\sqrt{3}+3i$ ، $Z_B=-\sqrt{3}-3i$ و $Z_C=2\sqrt{3}$

أ ـ أكتب على الشكل الجبري العدد المركب $\frac{Z_C - Z_A}{Z_B - Z_A}$ .

بـ ـ بيّن أنه يوجد دوران $R$ مركزه $A$ و يحوّل النقطة $B$ إلى النقطة $C$ ، يطلب تعيين زاويته .

جـ ـ استنتج طبيعة المثلث $ABC$ .

د ـ عيّن $Z_D$ لاحقة النقطة $D$ صورة النقطة $C$ بالإنسحاب الذي شعاعه $\overrightarrow{AB}$ ، ثم حدد بدقة طبيعة الرباعي $ABDC$ .

3) عيّن $(\Gamma)$ مجموعة النقط M من المستوي ذات اللاحقة غير المعدومة Z بحيث : $arg\left(\frac{Z}{\overline{Z}}\right) = 2k\pi$ حيث $k \in \mathbb{Z}$ .

## التمرين الثامن عشر [باك 2016] [م2] ( 4,5ن)

نعتبر في مجوعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول Z التالية : $2\overline{Z}^3 + 3\overline{Z}^2 - 3\overline{Z} + 5 = 0$ ..... $(E)$

يشير الرمز $\overline{Z}$ إلى مرافق العدد المركب Z .

1) أ ـ أثبت أن المعادلة $(E)$ تكافئ المعادلة : $(2\overline{Z}+5)(\overline{Z}^2 - \overline{Z} + 1) = 0$ .

بـ ـ حل في المجوعة $\mathbb{C}$ المعادلة $(E)$ .

2) في المستوي المركّب المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$ نعتبر النقط $A, B, C$ و $D$ التي لواحقها على الترتيب :

$$Z_A = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} \quad , \quad Z_B = \overline{Z}_A \quad , \quad Z_C = -1 \quad , \quad Z_D = -\frac{5}{2}$$

أ ـ أكتب كلا من العددين $Z_A$ و $Z_B$ على الشكل الأسّي .

بـ ـ أنشئ النقط $A, B, C$ و $D$ .

جـ ـ أثبت أن : $Z_B - Z_C = Z_B(Z_A - Z_C)$ .

د ـ إستنتج طبيعة المثلث $ABC$ .

3) ليكن $S$ التشابه المباشر الذي مركزه $C$ و نسبته 2 و زاويته $\frac{\pi}{3}$ و لتكن $F$ صورة $A$ بالتحويل $S$ .

أنشئ النقطة $F$ ثم حدد طبيعة المثلث $AFC$ .

4) عيّن طبيعة المجموعة $(\gamma)$ للنقط M من المستوي ذات اللاحقة Z حيث : $Z + 1 = kZ_B$ . لما يتغير k في المجموعة $\mathbb{R}_+$ .

## التمرين التاسع عشر [باك 2017] [م1] ( 5ن)

**I)** حل في مجوعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة : $(Z+2)(Z^2 - 4Z + 8) = 0$

**II)** المستوي المركّب المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$ .

نعتبر النقط $A, B$ و $C$ التي لاحقاتها : $Z_A = 2 - 2i$ ، $Z_B = \overline{Z}_A$ و $Z_C = -2$

1) أكتب كلا من العددين $Z_A$ و $Z_B$ على الشكل الأسّي .

2) عيّن $Z_D$ لاحقة النقطة $D$ حتى تكون النقطة $B$ مركز ثقل المثلث $ACD$ .

3) $(\Gamma)$ مجموعة النقط M من المستوي ذات اللاحقة Z ( M تختلف عن $A$ و $B$ ) بحيث : $arg\left(\frac{Z_B - Z}{Z_A - Z}\right) = \frac{\pi}{2}$ .

تحقق أن مبدأ المعلم $O$ هو نقطة من $(\Gamma)$ ثم عيّن طبيعة المجموعة $(\Gamma)$ و أنشئها .

4) ليكن $h$ التحاكي الذي مركزه النقطة $C$ و نسبته 2 ، $(\Gamma')$ صورة $(\Gamma)$ بالتحاكي $h$ .

عيّن طبيعة المجموعة $(\Gamma')$ مع تحديد عناصرها المميزة .

## التمرين العشرون [باك 2017] [ م2] ( 5ن)

المستوي المركّب منسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$ .

أجب بصحيح أو خطأ مع التعليل في كل حالة مما يلي :

1) مجموعة حلول المعادلة $\left(\frac{Z+1-i}{Z-i}\right)^2 = 1$ في المجموعة $\mathbb{C}$ هي : $S = \left\{-\frac{1}{2} + i\right\}$ .

2) من أجل كل عدد مركب $Z$ ، $|Z+2|^2 = (Z+2)(\overline{Z}+2)$ .

3) من أجل كل عدد طبيعي $n$ ، $\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{3n}=1$ .

4) $S$ التشابه المباشر الذي مركزه النقطة $\Omega$ ذات اللاحقة $1$ و نسبته $3$ و زاويته $\frac{\pi}{2}$

صورة الدائرة $(C)$ ذات المركز $\omega(0;1)$ و نصف القطر $3$ بالتشابه $S$ هي الدائرة $(C')$ ذات المركز $\omega'(-2;-3)$ و نصف القطر $9$.

5) من أجل كل عدد حقيقي : إذا كان $Z=(\sin\alpha+i\cos\alpha)\times(\cos\alpha-i\sin\alpha)$ فإن : $\arg(Z)=\frac{\pi}{2}-2\alpha+2k\pi$

حيث $k$ عدد صحيح .

## التمرين الواحد و العشرون[باك 2018 ][م1] (5ن)

1) حل في مجوعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول $Z$ التالية : $Z^2-\sqrt{3}Z+1=0$

2) المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$

$C$ و $B,A$ ثلاث نقط من المستوي لواحقها على الترتيب : $Z_A=\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$ ، $Z_B=\frac{\sqrt{3}}{2}+i\frac{1}{2}$ ، $Z_C=\overline{Z_B}$ .

أكتب $Z_A$ و $Z_B$ على الشكل الأسي ثم عين قيم العدد الطبيعي $n$ بحيث يكون : $\left(\frac{Z_A}{Z_B}\right)^n=\frac{1+i\sqrt{3}}{2}$

3) أ- تحقق أن : $\frac{Z_B}{Z_C}=e^{i\frac{\pi}{3}}$ و حدد طبيعة المثلث $OBC$ .

ب- إستنتج أن $B$ هي صورة $C$ بدوران $r$ يطلب تعيين عناصره المميزة .

4) نسمي $(\gamma)$ مجموعة النقط $M$ ذات اللاحقة $Z$ التي تحقق : $\left|\overline{Z}-\frac{\sqrt{3}+i}{2}\right|=|Z|$ .

عين طبيعة المجموعة $(\gamma)$ ثم عين صورتها بالدوران $r$ .

## التمرين الثاني و العشرون[باك 2018 ][م2] (5ن)

I) حل في مجوعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة : $(\overline{Z}-4+i)(Z^2-4Z+5)=0$ ($\overline{Z}$ يرمز لمرافق العدد $Z$)

II) في المستوي المركب المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$ ، نعتبر النقط $B,A$ و $C$ لواحقها على الترتيب :

$Z_A=2+i$ ، $Z_B=4+i$ ، $Z_C=\overline{Z_A}$ .

1) تحقق أن : $\frac{Z_B-Z_A}{Z_C-Z_A}=i$ ثم عين قيم العدد الطبيعي $n$ بحيث يكون $\left(\frac{Z_B-Z_A}{Z_C-Z_A}\right)^n$ تخيليا صرفا .

2) $D$ نقطة من المستوي لاحقتها $Z_D$ حيث : $\begin{cases}|Z_D-Z_A|=|Z_B-Z_A|\\ \arg\left(\frac{Z_D-Z_A}{Z_B-Z_A}\right)=\frac{\pi}{3}+2k\pi\ (k\in\mathbb{Z})\end{cases}$

بين أن المثلث $ABD$ متقايس الأضلاع و أحسب $Z_D$ .

3) أحسب $Z_G$ لاحقة النقطة $G$ مركز ثقل المثلث $ABD$ ثم عين نسبة و زاوية التشابه المباشر الذي مركزه $A$ ويحول $G$ إلى $D$ .

4) عين $(\Gamma)$ مجموعة النقط $M$ ذات اللاحقة $Z$ ( $M$ تختلف عن $C$ ) بحيث : $\arg\left(\frac{Z_G-Z}{Z_C-Z}\right)=\pi+2k\pi(k\in\mathbb{Z})$ .

لا تنسونا بصالح دعائكم ☺

الأستاذ : بخاخشة خالد